BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2014*

PACS: 03.65.-w

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Р.Г.АГАЕВА
Институт физики НАН Азербайджана
a.rana@physics.ab.az

С помощью квантовых интегралов движения разработан модифицированный метод факто- ризации для нестационарных систем. Применение модифицированного метода факторизации дает возможность найти точные решения для целого ряда нестационарных потенциалов.
.

Ключевые слова: метод факторизации, квантовые интегралы движения.

Развитый Шредингером [1-3] классический метод факторизации (КМФ), позволяет определять собственные функции (СФ) и собственные значения (СЗ) для стационарных задач.

Миелником [4] был разработан модифицированный метод факторизации (ММФ), который дает возможность построить класс одномерных стационарных потенциалов, имеющих спектр гармонического осциллятора, но отличающихся от его потенциала. Таким образом, с помощью ММФ можно расширить класс потенциалов, для которых точные решения существуют.

Для нестационарных систем решить задачу – это значит определить волновую функцию ψ, удовлетворяющую волновому уравнению $i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$, где $\hat{H}$ -гамильтониан рассматриваемой задачи. Но волновая функция нестационарной задачи не является СФ гамильтониана $\hat{H}$, и потому невозможно непосредственно обобщить ММФ на нестационарный случай.

В работе [5] разработан КМФ для нестационарного гармонического осциллятора.

Цель настоящей статьи – показать на примере гармонического осциллятора с зависящей от времени частотой, что не только КМФ, но и ММФ можно развить для нестационарных систем, если привлечь метод квантовых интегралов движения.

Рассмотрим нестационарный одномерный гармонический осциллятор. Известно, что гамильтониан такой системы равен

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)x^2}{2}, \qquad (1)$$

где x - координата, p - сопряженный ей импульс, m - масса, ω - частота. Для такой системы известны [6]:
операторы уничтожения и рождения

$$\hat{A}^- = \frac{i}{\sqrt{2\hbar}}\left(\frac{\varepsilon\hat{p}}{\sqrt{m}} - \dot{\varepsilon}\sqrt{m}\hat{x}\right) \qquad \hat{A}^+ = -\frac{i}{\sqrt{2\hbar}}\left(\frac{\varepsilon^*\hat{p}}{\sqrt{m}} - \dot{\varepsilon}^*\sqrt{m}\hat{x}\right) \qquad (2)$$

где $[\hat{A}^-, \hat{A}^+] = 1$, функция $\varepsilon(t)$ есть определенное решение уравнения для классического гармонического осциллятора

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2(t)\varepsilon = 0, \qquad (3)$$

и верное для любого момента времени равенство

$$\dot{\varepsilon}\varepsilon^* - \dot{\varepsilon}^*\varepsilon = 2i \qquad (4)$$

Операторы $\hat{A}^-, \hat{A}^+$ являются интегралами движения, т.е.

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}, \hat{A}^{\pm}\right] = 0. \qquad (5)$$

По аналогии с [4] введем новые операторы $\hat{B}^{\pm}$:

$$\hat{B}^- = \frac{i}{\sqrt{2\hbar}}\left(\frac{\varepsilon\hat{p}}{\sqrt{m}} - \dot{\varepsilon}\sqrt{m}\beta(x)\right) \quad \hat{B}^+ = -\frac{i}{\sqrt{2\hbar}}\left(\frac{\varepsilon^*\hat{p}}{\sqrt{m}} - \dot{\varepsilon}^*\sqrt{m}\beta^*(x)\right), \qquad (6)$$

где $\beta(x)$ - произвольная функция от координат, и потребуем, чтобы

$$\hat{A}^-\hat{A}^+ = \hat{B}^-\hat{B}^+ \qquad (7)$$

Это приводит к следующему уравнению для $\beta(x)$:

$$m|\dot{\varepsilon}|^2 x^2 - \varepsilon\dot{\varepsilon}^*\hat{p}x - \dot{\varepsilon}\varepsilon^* x\hat{p} = m|\dot{\varepsilon}|^2|\beta|^2 - \varepsilon\dot{\varepsilon}^*\hat{p}\beta^* - \dot{\varepsilon}\varepsilon^*\beta\hat{p} \qquad (8)$$

Одно частное решение уравнения (8) известно - это $\beta = x$. Поэтому решение этого уравнения может быть получено подстановкой

$$\beta = x + i\frac{F(x)}{\dot{\varepsilon}\varepsilon^*}, \quad \operatorname{Im} F(x) = 0 \qquad (9)$$

Подставим ф. (9) в ф.(8). Это даст с учетом ф.(4)

$$F' + CF(2x + F) = 0, \quad C = \frac{m}{\hbar|\varepsilon|^2} \qquad (10)$$

где штрих означает производную по x. Вводя новую переменную

$y = 1/F$, приходим к линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка

$$y' - C(2xy + 1) = 0 \tag{11}$$

Общее решение уравнения (11) есть

$$y = \sqrt{C}\left[\gamma + \int_0^{x\sqrt{C}} dz \exp\left(-z^2\right)\right]\exp\left(Cx^2\right) = 0, \quad \gamma \in R \tag{12}$$

Поэтому

$$F(x) = y^{-1} = C^{-1/2}\left[\gamma + \int_0^{x\sqrt{C}} dz \exp\left(-z^2\right)\right]^{-1} \exp\left(-Cx^2\right) = 0 \tag{13}$$

Итак, из условия (7) удалось определить $F(x)$, следовательно, по ф.(9) и $\beta(x)$.

Воспользовавшись равенством (9), нетрудно доказать, что коммутатор $[\hat{B}^-, \hat{B}^+]$ не число:

$$[\hat{B}^-, \hat{B}^+] = 1 + F' \tag{14}$$

В работе [5] при рассмотрении КМФ для системы с гамильтонианом (1) был введен оператор

$$\hat{K} = \hat{A}^+\hat{A}^- + \frac{1}{2} \tag{15}$$

где операторы $\hat{A}^{\pm}$ даются ф. (2). С помощью ф. (7), (14), (15) и вводя обозначение

$$\hat{\tilde{K}} = \hat{K} - F' \tag{16}$$

можно представить произведение $\hat{B}^+\hat{B}^-$ в виде

$$\hat{B}^+\hat{B}^- = \hat{\tilde{K}} - \frac{1}{2} \tag{17}$$

Сравнивая ф.(17) и ф. (15), видим, что в нестационарном ММФ $\hat{\tilde{K}}$ является аналогом $\hat{K}$.

В работе [5] было установлено, что $\hat{K}$ - квантовый интеграл движения [7] для нестационарного осциллятора с гамильтонианом $\hat{H}$, даваемым выражением (1). Выясним, каков вид гамильтониана $\hat{\tilde{H}}$ нестационарной системы, относительно которой $\hat{\tilde{K}}$ является интегралом движения, т.е. какой $\hat{\tilde{H}}$ удовлетворяет условию

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{\tilde{H}}, \hat{\tilde{K}}\right] = 0 \tag{18}$$

Предположим, что

$$\hat{\tilde{H}} = \hat{H} + V \tag{19}$$

и V - произвольная функция от x. Подставим ф. (19) и (16) в ф. (18) и учтем, что $\hat{K}$ является интегралом движения для нестационарного осциллятора (1). Получим вместо ф. (18)

$$i\hbar \frac{\partial F'}{\partial t} - \left[\hat{H}, F'\right] + \left[V, \hat{K}\right] = 0 \tag{20}$$

Подставим вместо $\hat{H}$ выражение (1), а вместо $\hat{K}$ выражение (15), в котором заменим $\hat{A}^{\pm}$ согласно ф. (2). В результате этих подстановок из всех слагаемых, входящих в ф.(20), только два слага - являются операторами: $\left[\hat{H}, F'\right] \to \frac{1}{2m}\left[\hat{p}^2, F'\right] \sim \hat{p}$ и $\left[V, \hat{K}\right] \to \frac{|\varepsilon|^2}{2\hbar m}\left[V, \hat{p}^2\right] \sim \hat{p}$. Для того, чтобы равенство (20) имело место, необходимо, чтобы сумма этих двух слагаемых была равна нулю. Принимая во внимание вышеизложенное, можем определить вид V:

$$V = -\hbar |\varepsilon|^{-2} F' \tag{21}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что V, даваемое выражением (21),
действительно будет решением уравнения (20), если константу γ, входящую в $F(x)$, считать зависящей от времени, причем следующим образом:

$$\dot{\gamma} = \alpha\gamma \tag{22}$$

где
$$\alpha = -\left(\dot{\varepsilon}\varepsilon^* + \dot{\varepsilon}^*\varepsilon\right)/2|\varepsilon|^2 \tag{23}$$

Проверку облегчает предварительный расчет следующих величин:
из ф. (13)

$$F' = -CF(2x + F) \tag{24}$$

$$F'' = -2CF\left[1 - C\left(2x^2 + F^2 + 3xF\right)\right] \tag{25}$$

из ф. (10)

$$\dot{C} = 2C\alpha \tag{26}$$

Из ф. (1.3.8.8) и (1.3.8.1) [8]
3 3

$$\int_0^x dx\, x^2 \exp\left(-Cx^2\right) = (2C)^{-1}\left(\int_0^x dx\, \exp\left(-Cx^2\right) - x\exp\left(-Cx^2\right)\right) \tag{27}$$

Формулу (23) для α можно представить в виде

$$\alpha = -\frac{d}{dt}\ln\left(\omega_0 |\varepsilon|^2\right) \tag{28}$$

где ввели $\omega_0 = \omega(t = 0)$ для того, чтобы под $\ln$ стояла безразмерная величина. С учетом (28) легко решить уравнение (22). В итоге выражение (13) для F принимает вид

$$F(x,t)=C^{-1/2}\left[\left(\omega_0|\varepsilon|^2\right)^{-1}\tilde{\gamma}+\int_0^{x\sqrt{C}}dz\exp\left(-z^2\right)\right]^{-1}\exp\left(-Cx^2\right)=0\,,\qquad \tilde{\gamma}\in R \qquad (29)$$

Зная выражение для $F(x,t)$ и стартуя от гамильтониана нестационарного гармоничес- кого осциллятора (1), можно по ф.(21) и ф. (19) построить однопараметрическое семейство нестационарных гамильтонианов ($\hat{\tilde{H}}$), для которых существуют точные решения ($\tilde{\psi}$). Получим эти точные решения.

Как было отмечено выше, для решения нестационарной задачи, т.е. для определения волновой функции $\tilde{\psi}$, можно вместо соответствующего волнового уравнения с $\hat{\tilde{H}}$ воспользоваться задачей на СЗ для оператора $\hat{\tilde{K}}$. Это связано с тем, что оператор $\hat{\tilde{K}}$ коммутирует с оператором $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\hat{\tilde{H}}\right)$ (см. ф.(18)) и , следовательно, эти операторы имеют общую систему СФ. Но оказывается, что СЗ ($\tilde{K}$) и СФ ($\tilde{\psi}$) оператора $\hat{\tilde{K}}$ получаются автоматически из СЗ (K) и СФ (ψ) оператора $\hat{K}$. Действительно, если учесть ф. (17), ф. (7), $[\hat{A}^-,\hat{A}^+]=1$ и ф. (15), то

$$\hat{\tilde{K}}\hat{B}^+=\hat{B}^+\left(\hat{K}+1\right) \qquad (30)$$

Тогда для ψ_n, являющейся СФ $\hat{K}$, функции

$$\tilde{\psi}_n=\hat{B}^+\psi_{n-1} \qquad (n=1,2,...) \qquad (31)$$

будут СФ $\hat{\tilde{K}}$, соответствующими тем же СЗ ($K=K'$), т.е.

$$\hat{\tilde{K}}\tilde{\psi}_n=K_n\tilde{\psi}_n \qquad (32)$$

Легко убедиться в том, что все $\tilde{\psi}_n$ из ф. (31) ортогональны друг к другу, т.е. при $n\neq n'$

$$(\tilde{\psi}_n,\tilde{\psi}_{n'})=0 \qquad (33)$$

Однако ф. (31) не охватывает всех СФ оператора $\hat{\tilde{K}}$. Действительно, можно построить еще одну СФ $\tilde{\psi}_0$, исходя из условия ее ортогональности всем остальным СФ. С этой целью положим в ф. (34) $n=0$, что приводит к условию

$$\hat{B}^-\tilde{\psi}_0=0\,, \qquad (34)$$

откуда с учетом выражений (6), (9), (13) имеем

$$\tilde{\psi}_0=const\cdot\exp\left(i\dot{\varepsilon}mx^2/2\hbar\varepsilon\right)\exp\left(-C\int_0^x F(z,t)dz\right) \qquad (35)$$

По самому определению (35) $\tilde{\psi}_0$ есть еще одна, как видно из ф. (32), СФ оператора $\hat{\tilde{K}}$, соответствующая СЗ $K_0 = 1/2$.

Совершая предельный переход $t \to 0$ в полученных в настоящей работе выражениях для потенциалов и волновых функций, можно получить соответствующие выражения стационарной задачи [4].

Итак, применение ММФ к нестационарному гармоническому осциллятору позволяет найти точные решения для целого ряда ангармонических потенциалов. Спектр таких потенциалов одинаков, и казалось бы, такие системы отличить друг от друга на опыте нельзя.

Однако из-за различия волновых функций этих изоспектральных систем любое внешнее возмущение дает возможность отличить одну систему от другой. Поэтому ММФ представляет не только теоретический, но и практический интерес.

Автор благодарен проф. Ф.М.Гашимзаде за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schrödinger E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions// Proc. R. Irish Acad. A, 1940, v.46, p. 9-16.
2. Schrödinger E. Further studies on solving eigenvalue problems by factorization// Proc. R. Irish Acad. A, 1940, v.46, p. 183-206.
3. Schrödinger E. The factorization of the hypergeometric equation// Proc. R. Irish Acad. A, 1940, v.47, p. 53-54.
4. Mielni*k* B. Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum// J. Math. Phys., 1984, v.25, p. 3387-3389.
5. Agayeva R. G. Classical factorization method for the non-stationary system// Fizika, 2002, v.8, № 4б. p. 62-63.
6. Agayeva R. G. Non-adiabatic parametric excitation of oscillator-type systems// J. Phys. A: Math. Gen, 1980, v.13, p. 1685-1699.
7. Малкин И.А., Манько В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. Москва: Наука, 1979, 320 с.
8. Прудников А.П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981, 799 с

QEYRİ-STASİONAR SİSTEMLƏR ÜÇÜN TƏKMİLLƏŞDİRİLMİŞ FAKTORİZASİYA METODU

R.Q.AĞAYEVA

XÜLASƏ

Hərəkətin kvant inteqrallarının köməyilə qeyri-stasionar sistemlər üçün təkmilləşdirilmiş faktorizasiya metodu işlənib. Təkmilləşdirilmiş faktorizasiya metodunun tətbiqi bir sıra qeyri-stasionar potensial üçün dəqiq həlləri tapmağa imkan verir.

Açar sözlər: faktorizasiya metodu, hərəkətin kvant inteqralları

MODİFİED FACTORİZATİON METHOD FOR NON-STATİONARY SYSTEMS

R.G.AGHAYEVA

SUMMARY

The modified factorization method is developed for non-stationary systems with the use of quantum integrals of motion. The use of a modified factorization method allows finding exact solutions for a number of non-stationary potentials.

Keywords: factorization method, quantum integrals of motion

Поступила в редакцию: 03.06.2014 г.
Подписано к печати: 26.11.2014 г.